Critère de ROUTH (ou Routh-Hurwitz)

On appelle critère de Routh un critère algébrique permettant d'évaluer la stabilité d'un système à partir des coefficients du dénominateur D(p) de sa fonction de transfert en boucle fermée (**FTBF**). Il est équivalent au critère graphique du revers quant aux conclusions induites.

Ce critère est issu d'une méthode qui permet de décompter le nombre de racines à partie réelle positive ou nulle du polynôme D(p). Cette méthode est elle-même déduite de l'étude des polynômes d'Hurwitz, et consiste à former le tableau suivant :

Construction du tableau des coefficients

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \dots + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

$$
\begin{array}{c|c|cccccc|ccc}
p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_2 & a_0 & & \dots & a_3 & a_1 \\
p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \underbrace{a_1 \quad\quad}_{\textit{si n pair}} & & & \dots & \underbrace{a_2 \quad a_0}_{\textit{si n impair}} & \\
p^{n-2} & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots & & & & \dots & & \\
p^{n-3} & c_{n-3} & \dots & \dots & & & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & & & & & & & & \\
p^1 & \dots & \dots & & & & & & & & \\
p^0 & \dots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Première colonne, dite des pivots

La première ligne contient les coefficients des termes en p^{n-2k}, dans l'ordre des puissances décroissantes.

La deuxième ligne contient les coefficients des termes en p^{n-1-2k}, et se termine suivant la parité de n.

Les lignes suivantes sont remplies en suivant les lois de formation suivantes :

$$
b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad b_{\mathbf{n-i}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{\mathbf{n-i}} \\ a_{n-1} & a_{\mathbf{n-i-1}} \end{vmatrix}
$$

$$
c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} \qquad c_{\mathbf{n-j}} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{\mathbf{n-j}} \\ b_{n-2} & b_{\mathbf{n-j-1}} \end{vmatrix}
$$

Si nécessaire, une case vide est prise égale à zéro.

Le calcul des lignes est poursuivi jusqu'à ce que la première colonne soit remplie.

Enoncé du critère

Le système est stable si et seulement si
tous les termes de la première colonne sont strictement positifs.

Propriétés de la méthode

- Il y a autant de racines à partie réelle positive que de changements de signe dans la première colonne.
- L'apparition de lignes de zéros indique l'existence de racines imaginaires pures (par paires).
  Dans ce cas, correspondant à un système oscillant, on continue le tableau en remplaçant la ligne nulle par les coefficients obtenus en dérivant le polynôme reconstitué à partir de la ligne supérieure, les racines imaginaires pures étant les racines imaginaires de ce polynôme bicarré reconstitué. (Cf. exemple 3)

Exemples

1. $D(p) = p^4 + p^3 + 3.p^2 + p + 1$

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	0,5	0	
p^0	1		

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$c_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 0{,}5$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$d_0 = \frac{-1}{0{,}5}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0{,}5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système stable

2. $D(p) = p^4 + p^3 + 2.p^2 + 2.p + 1$

p^4	1	2	1
p^3	1	2	0
p^2	0	1	

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 0$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

On note ici que le pivot devient nul, ce qui ne permet pas de poursuivre. La méthode consiste alors à remplacer le polynôme de départ par un polynôme « à même stabilité », par exemple en le multipliant par un polynôme dont on connaît les racines, choisies bien évidemment réelles et négatives. La solution la plus simple est donc ici de prendre comme nouveau polynôme Da(p)=(p+a).D(p), avec a réel positif, p.ex. 1.

$D_1(p) = p^5 + 2.p^4 + 3.p^3 + 4.p^2 + 3.p + 1$

p^5	1	3	3
p^4	2	4	1
p^3	1	2,5	0
p^2	-1	1	0
p^1	3,5	0	
p^0	1		

$b_3 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix} = 1$; $\quad b_1 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 2{,}5$

$c_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2{,}5\end{vmatrix} = -1$; $\quad c_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$d_1 = \frac{-1}{-1}\begin{vmatrix}1 & 2{,}5\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 3{,}5$; $\quad d_{-1} = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0$

$e_0 = \frac{-1}{3{,}5}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3{,}5 & 0\end{vmatrix} = 1$

En conclusion : Système instable

3. $D(p) = p^4 + p^3 + 5.p^2 + 4.p + 4$

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p^1	0	0	

p^2	1	4
p^1	2	0
p^0	4	

$b_2 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 1$; $\quad b_0 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 4$

$c_1 = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 0$; $\quad c_{-1} = \frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0$

Le polynôme reconstitué à partir de la ligne 3 est p^2+4, qui admet $\pm 2j$ pour racines et pour polynôme dérivé 2.p. D'où la reconstitution du tableau pour poursuivre l'étude :

$d_0 = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 4$

En conclusion : Système stable, mais oscillant