Composition des vecteurs accélération

Le problème

Est-il possible d'écrire une relation simple de composition des vecteurs accélérations ?

Etude d'un mouvement (3/1)

Soit un solide 3 en mouvement par rapport à 2, lui même en mouvement par rapport à 1.

Pour tout point P fixe dans 3 à chaque instant et par définition du vecteur accélération

$$\vec{A}(P, 3/1) = \left[\frac{d\vec{V}(P, 3/1)}{dt}\right]_1 \qquad (1)$$

Par composition des vecteurs vitesses

$$\vec{V}(P, 3/1) = \vec{V}(P, 3/2) + \vec{V}(P, 2/1) \qquad (2)$$

L'opérateur de dérivation vectorielle est un opérateur linéaire. Le vecteur accélération recherché est donc à calculer comme somme de deux termes

$$\vec{A}(P, 3/1) = \left[\frac{d\vec{V}(P, 3/2)}{dt}\right]_1 + \left[\frac{d\vec{V}(P, 2/1)}{dt}\right]_1 \qquad (3)$$

- Détermination de $\left[\frac{d\vec{V}(P, 3/2)}{dt}\right]_1$ --

La formule de dérivation vectorielle permet d'écrire

$$\left[\frac{d\vec{V}(P, 3/2)}{dt}\right]_1 = \left[\frac{d\vec{V}(P, 3/2)}{dt}\right]_2 + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P, 3/2) \qquad (4)$$

Par définition du vecteur accélération, et comme le point P est fixe dans 3 à chaque instant

$$\left[\frac{d\vec{V}(P, 3/2)}{dt}\right]_2 = \vec{A}(P, 3/2) \qquad (5)$$

Le premier terme recherché est donc de la forme

$$\left[\frac{d\vec{V}(P, 3/2)}{dt}\right]_1 = \vec{A}(P, 3/2) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P, 3/2) \qquad (6)$$

- Détermination de $\left[\frac{d\vec{V}(P, 2/1)}{dt}\right]_1$ --

Le calcul de ce terme est plus délicat, car le point P n'est pas fixe dans 2 à chaque instant. Il s'agit du point de 2 coïncidant à l'instant t considéré avec le point P fixe dans 3, tel que cela a été étudié lors de la composition des vecteurs vitesses

Pour résoudre ce problème, la méthode la plus simple à mettre en œuvre est d'effectuer le calcul en considérant un point fixe dans 2 à chaque instant, et à comparer le résultat avec celui obtenu lors de l'étude du champ des vecteurs accélérations :

Soit I ce point fixe dans 2 à chaque instant

$$\vec{V}(P, 2/1) = \vec{V}(I, 2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{IP} \qquad (7)$$

Il est donc nécessaire de déterminer deux nouveaux termes, car

$$\left[\frac{d\vec{V}(P,\ 2/1)}{dt}\right]_1 = \left[\frac{d\vec{V}(I,\ 2/1)}{dt}\right]_1 + \left[\frac{d\vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{IP}}{dt}\right]_1 \qquad (8)$$

Par définition du vecteur accélération, et comme le point I est fixe dans 2 à chaque instant

$$\left[\frac{d\vec{V}(I,\ 2/1)}{dt}\right]_1 = \vec{A}(I,\ 2/1) \qquad (9)$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de dérivation d'un produit

$$\left[\frac{d\vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{IP}}{dt}\right]_1 = \left[\frac{d\vec{\Omega}(2/1)}{dt}\right]_1 \Lambda\ \vec{IP} + \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda \left[\frac{d\vec{IP}}{dt}\right]_1 \qquad (10)$$

La formule de dérivation vectorielle permet d'écrire immédiatement

$$\left[\frac{d\vec{IP}}{dt}\right]_1 = \left[\frac{d\vec{IP}}{dt}\right]_2 + \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{IP} \qquad (11)$$

Le point P est fixe à chaque instant dans 3 et le point I est fixe à chaque instant dans 2. On a donc, par définition du vecteur vitesse

$$\left[\frac{d\vec{IP}}{dt}\right]_2 = \vec{V}(P,\ 3/2) \qquad (12)$$

Après les différentes substitutions, l'expression détaillée du terme recherché devient

$$\left[\frac{d\vec{V}(P,\ 2/1)}{dt}\right]_1 = \vec{A}(I,\ 2/1) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(2/1)}{dt}\right]_1 \Lambda\ \vec{IP} + \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ (\vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{IP}\ ) + \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{V}(P,\ 3/2) \qquad (13)$$

Si le point P était un point fixe à chaque instant dans 2, on aurait la relation vue lors de l'étude du champ des vecteurs accélérations, à savoir

$$\vec{A}(P,\ 2/1) = \vec{A}(I,\ 2/1) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(2/1)}{dt}\right]_1 \Lambda\ \vec{IP} + \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ (\vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{IP}\ ) \qquad (14)$$

On en déduit la forme finale du second terme recherché

$$\left[\frac{d\vec{V}(P,\ 2/1)}{dt}\right]_1 = \vec{A}(P,\ 2/1) + \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{V}(P,\ 3/2) \qquad (15)$$

- Conclusion --

La composition des vecteurs accélérations s'écrit

$$\vec{A}(P,\ 3/1) = \vec{A}(P,\ 3/2) + \vec{A}(P,\ 2/1) + 2\ \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{V}(P,\ 3/2) \qquad (16)$$

avec

$\vec{A}(P,\ 3/1)$:	Vecteur accélération du point P dans le mouvement de 3 par rapport à 1.
$\vec{A}(P,\ 3/2)$:	Vecteur accélération du point P dans le mouvement de 3 par rapport à 2.
$\vec{A}(P,\ 2/1)$:	Vecteur accélération du point P s'il était immobile dans 2 au cours du temps, dans le mouvement de 2 par rapport à 1.
$2\ \vec{\Omega}(2/1)\ \Lambda\ \vec{V}(P,\ 3/2)$:	Accélération complémentaire, appelée accélération de Coriolis, due au mouvement du point P dans un repère lui-même en rotation.