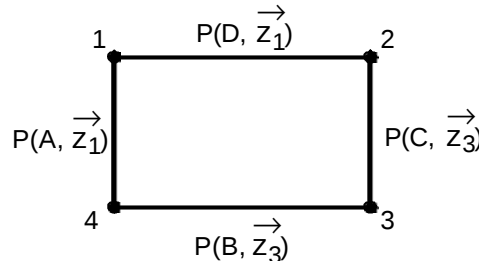


## Ouvre portail – Éléments de corrigé

Les dimensions  $b^*$  et  $d^*$  sont des dimensions réglables, mais supposées **constantes** une fois réglées.

Le graphe des liaisons à considérer est donc le suivant :



L'analyse des sommets du graphe donne les quatre dimensions ayant une influence sur le fonctionnement, à savoir  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $e_3$  et  $e_4$ .

Les dimensions  $e_3$  et  $e_4$  sont supposées identiques et notées  $e$ , la loi entrée-sortie recherchée est donc de la forme :

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} = f(\alpha, \beta, \mu, \lambda, e) \quad (1)$$

Le paramétrage géométrique adopté est donné en annexe, et les quatre torseurs cinématiques sont :

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D \quad \mathcal{V}(3/2) = \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \quad \mathcal{V}(4/3) = \begin{Bmatrix} \dot{\delta} \cdot \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \quad \mathcal{V}(4/1) = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Issue de la chaîne fermée 1-2-3-4-1, la loi de composition des vitesses au point C scalaire  $\vec{BC}$  élimine les deux inconnues indésirables  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{\delta}$  :

$$(\vec{V}(C, 2/1) + \vec{V}(C, 3/2) + \vec{V}(C, 4/3) - \vec{V}(C, 4/1)) \cdot \vec{BC} = 0 \quad (2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{V}(C, 2/1) \cdot \vec{BC} &= (\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{DC}) \cdot \vec{BC} = (\dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1, \vec{DB}, \vec{BC}) \\ \vec{V}(C, 3/2) &= \vec{0} \\ \vec{V}(C, 4/3) \cdot \vec{BC} &= (\vec{\Omega}(4/3) \wedge \vec{BC}) \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{V}(C, 4/1) \cdot \vec{BC} &= (\vec{\Omega}(4/1) \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = (\dot{\beta} \cdot \vec{z}_1, \vec{AC}, \vec{BC}) = (\dot{\beta} \cdot \vec{z}_1, \vec{AB} + \vec{BC}, \vec{BC}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité des produits mixtes :

$$(\dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1, \vec{DC}, \vec{BC}) = (\dot{\beta} \cdot \vec{z}_1, \vec{AB}, \vec{BC}) \quad (3)$$

Et la loi entrée sortie du mécanisme s'écrit simplement :

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} = \frac{(\vec{z}_1, \vec{AB}, \vec{BC})}{(\vec{z}_1, \vec{DC}, \vec{BC})} \quad (4)$$

L'égalité (3) se retrouve en exploitant l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse 3/1 :

$$\vec{V}(C, 3/1) \cdot \vec{BC} = \vec{V}(B, 3/1) \cdot \vec{BC} \quad (5)$$

Pour éviter l'apparition d'angles indésirables dans la loi entrée-sortie, on utilise la description du vecteur  $\vec{BC}$  suivante :

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} \quad (6)$$

Quatre produits mixtes sont ainsi à calculer.

$$(\vec{z}_1, \vec{AB}, \vec{BC}) = (\vec{z}_1, \vec{AB}, \vec{AD} + \vec{DC}) :$$

$$\triangleright (\vec{z}_1, \vec{AB}, \vec{AD}) = e.\mu.(\vec{z}_1, \vec{x}_4, \vec{u}_1) = -e.\mu.\sin(\beta')$$

$$\triangleright (\vec{z}_1, \vec{AB}, \vec{DC}) = e.\lambda.(\vec{z}_1, \vec{x}_4, \vec{u}_2) = -e.\lambda.\sin(\beta' - \alpha')$$

$$(\vec{z}_1, \vec{DC}, \vec{BC}) = (\vec{z}_1, \vec{DC}, \vec{BA} + \vec{AD}) :$$

$$\triangleright (\vec{z}_1, \vec{DC}, \vec{BA}) = -\lambda.e.(\vec{z}_1, \vec{u}_2, \vec{x}_4) = -e.\lambda.\sin(\beta' - \alpha')$$

$$\triangleright (\vec{z}_1, \vec{DC}, \vec{AD}) = \lambda.\mu.(\vec{z}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1) = -\lambda.\mu.\sin(\alpha')$$

On obtient ainsi la forme la plus simple de la loi entrée-sortie :

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} = \frac{\dot{\alpha}'}{\dot{\beta}'} = \frac{e.\lambda.\sin(\alpha' - \beta') - e.\mu.\sin(\beta')}{e.\lambda.\sin(\alpha' - \beta') - \lambda.\mu.\sin(\alpha')} \quad (7)$$

Cette loi a une forme intégrable remarquable :

$$e.\lambda.\sin(\alpha' - \beta').(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) - \lambda.\mu.\sin(\alpha').\dot{\alpha} + e.\mu.\sin(\beta').\dot{\beta} = 0 \quad (8)$$

*Remarque :*

Un calcul similaire est bien évidemment possible à partir du paramétrage du sujet, en utilisant comme description du vecteur  $\vec{BC}$  la composition suivante :

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AO} + \vec{OD} + \vec{DH} + \vec{HC} \quad (9)$$

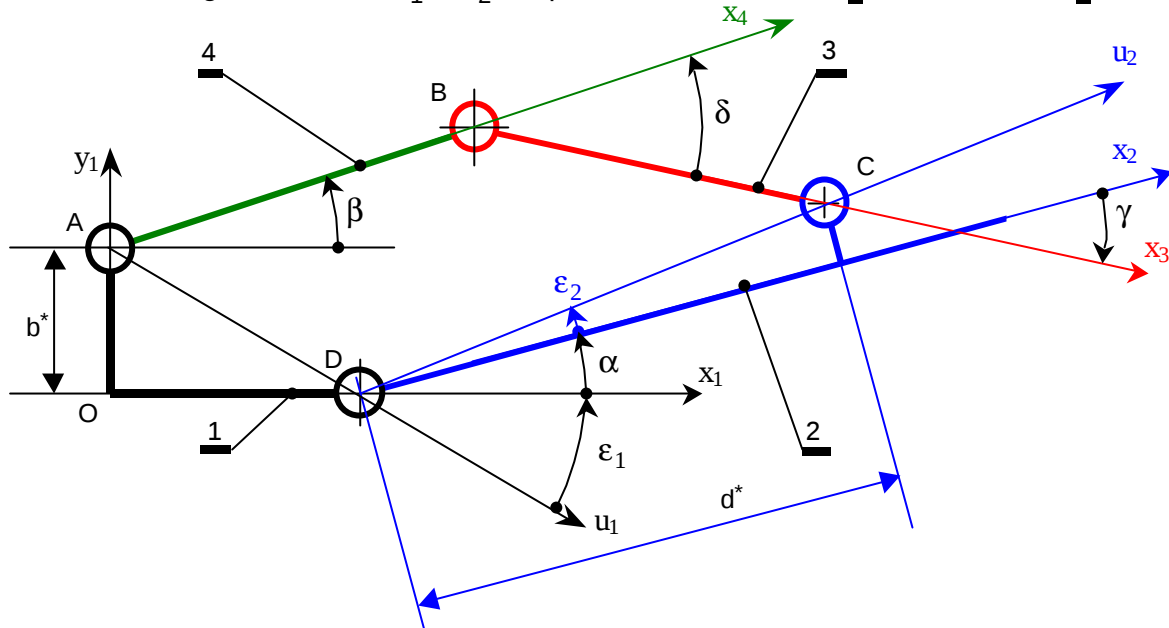
Il y a en conséquence dix produits mixtes à calculer, au lieu de quatre, pour obtenir la relation suivante :

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} = \frac{d.e.\sin(\alpha - \beta) + c.e.\cos(\alpha - \beta) - a.e.\sin(\beta) - b.e.\cos(\beta)}{d.e.\sin(\alpha - \beta) + c.e.\cos(\alpha - \beta) - a.d.\sin(\alpha) - b.d.\cos(\alpha) - a.c.\cos(\alpha) + b.c.\sin(\alpha)} \quad (10)$$

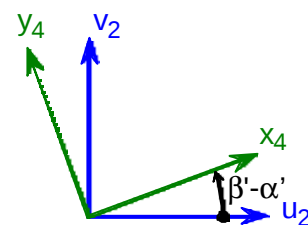
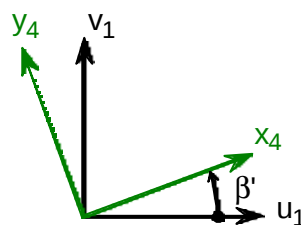
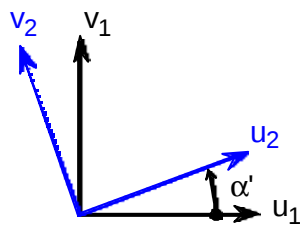
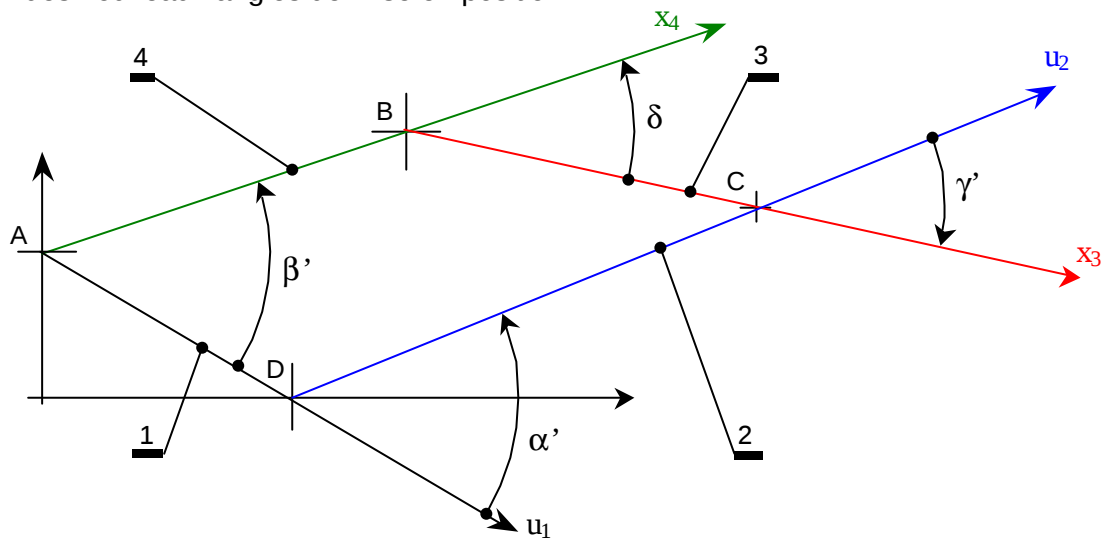
L'équivalence des relations (7) et (10) se vérifie à l'aide des règles usuelles de trigonométrie.

## Annexe – Paramétrage géométrique

Définition des angles invariants  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , respectivement sur le bâti 1 et sur le vantail 2 :



Définition des nouveaux angles de mise en position :



$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \beta' &= \beta + \varepsilon_1 \\ \gamma' &= \gamma - \varepsilon_2\end{aligned}$$